

INVESTIGACIONES

Diseño de una experiencia didáctica para abordar el estudio de la variable

Design of a didactic experience
to address the study of the variable

*Mayra Uribe-Hernández^a, Victor Larios-Osorio^a,
Luis Roberto Pino-Fan^b*

^a Universidad Autónoma de Querétaro, México.
muribe37@alumnos.uaq.mx, vil@uaq.mx

^b Universidad de Los Lagos, Chile.
luis.pino@ulagos.cl

RESUMEN

Diversas investigaciones coinciden en que el concepto variable posee un carácter multifacético, en los problemas algebraicos se presenta con distintas definiciones, referentes y símbolos, por lo que los estudiantes muestran dificultad para interpretar y poner en juego sus diversos usos. En este artículo presentamos el diseño e implementación de un proceso de estudio sobre la variable, el cual permite la comprensión de sus usos por parte de los estudiantes. Para el desarrollo de la investigación utilizamos las etapas de la Investigación Basada en el Diseño (IBD) y las nociones de trayectoria didáctica e idoneidad didáctica introducidas por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS). Se analiza el desarrollo de tres sesiones con un grupo de estudiantes mexicanos de nivel Secundaria. El análisis retrospectivo entre las etapas de diseño e implementación, permitió identificar la adquisición de competencias algebraicas. Éstos resultados podrían orientar el diseño de experiencias didácticas.

Palabras clave: didáctica de la matemática, álgebra, variable, educación secundaria.

ABSTRACT

Various investigations agree that the variable concept has a multifaceted character, in algebraic problems it is presented with different definitions, references and symbols, so that students show difficulty in interpreting and putting into play its various uses. In this article we present the design and implementation of a study process on the variable, which allows students to understand its uses. For the development of the research we used the stages of Design-Based Research (DBR) and the notions of didactic trajectory and didactic suitability introduced by the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (EOS). The development of three sessions with a group of Mexican high school students is analyzed. The retrospective analysis between the design and implementation stages allowed us to identify the acquisition of algebraic skills. These results could guide the design of didactic experiences.

Key words: didactics of mathematics, algebra, variable, secondary education.

1. INTRODUCCIÓN

Diversas investigaciones coinciden en que la variable posee un carácter multifacético (Blanton *et al.*, 2017; Brizuela *et al.*, 2015; Herrera *et al.*, 2016; Küchemann, 1978; Lucariello *et al.*, 2014; Şahin y Soyly, 2011; Ursini *et al.*, 2005; Usiskin, 1988; Weinberg *et al.*, 2016), es decir, en los problemas algebraicos se presenta con distintas definiciones, referentes y símbolos, por lo que articular una sola concepción de la variable distorsiona los objetivos del álgebra.

Weinberg *et al.* (2016), sugiere que los prejuicios negativos sobre las matemáticas se deben a la implicación de conceptos abstractos, además de la compleja relación entre pensar y simbolizar. Küchemann (1978), analiza la tendencia a utilizar el término variable para las letras en aritmética generalizada; en su trabajo propone seis niveles para describir los diferentes usos: letra evaluada, ignorada, como objeto, como específico desconocido, como número generalizado y como variable. Ursini *et al.* (2005), señala que los tres usos más comunes de la variable en el álgebra elemental son: la variable como número general, cómo incógnita y en una relación funcional.

En esta línea, las investigaciones han identificado ideas erróneas sobre el concepto variable, y coinciden en que existe una recurrencia en ignorarla, tratarla como la etiqueta de un objeto y la creencia de que refiere a un valor desconocido fijo (Lucariello *et al.*, 2014; Şahin y Soyly, 2011). Éstas ideas están arraigadas conceptualmente, y este razonamiento erróneo incrementa conforme avanzan los niveles educativos. En el aprendizaje de la variable el espacio semántico adquiere significado gradualmente, es decir, los significados coexisten, evolucionan y cambian; las relaciones entre símbolos y significados se desarrollan progresivamente y según los contextos (Brizuela *et al.*, 2015). Sin embargo, el conocimiento que adquiere el estudiante es de tipo procedimental, lo que limita la capacidad de asociar los significados de los distintos conceptos implicados en una tarea matemática (Herrera *et al.*, 2016).

Desde este punto de vista, ¿cómo se puede ayudar a los estudiantes para que interpreten y utilicen los diversos significados de la variable en sus prácticas matemáticas? El objetivo de este artículo es presentar los resultados obtenidos con el diseño e implementación de un proceso de estudio (trayectoria didáctica) sobre la variable, con estudiantes de nivel secundaria. Este proceso de estudio constó de tres sesiones en las que se abordó la asociación del álgebra con la vida cotidiana, el uso de la variable como número general y su uso como incógnita. Los resultados obtenidos permiten observar un progreso en la adquisición de competencias algebraicas por parte de los estudiantes, además dan muestra de la relevancia de analizar a profundidad el diseño, implementación y valoración de intervenciones educativas condicionadas por el contexto en el que se espera llevarlas a cabo.

2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Para el desarrollo de este trabajo, utilizamos la aproximación metodológica de la Investigación Basado en el Diseño -IBD- y su articulación con el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino *et al.*, 2013). En la sección de metodología retomaremos las etapas propuestas por el IBD. Sobre el EOS, concretamente, utilizamos la noción de idoneidad didáctica (Breda *et al.*, 2018), que refiere a una herramienta descriptivo-explicativa que permite valorar la pertinencia de una intervención efectiva en el aula, y que

considera de manera sistémica seis facetas involucradas (según el EOS) en los procesos de estudio de las matemáticas, dando paso así a idoneidades parciales que permiten valorar procesos de estudio de temas curriculares específicos (Godino, 2011; Godino *et al.*, 2006):

- Idoneidad cognitiva, grado de proximidad de los significados pretendidos con la zona de desarrollo potencial de los estudiantes, así como de los significados personales logrados.
- Idoneidad epistémica, grado de representatividad que tienen los significados institucionales implementados respecto a un significado de referencia.
- Idoneidad interaccional, identifica conflictos semióticos potenciales para favorecer la autonomía en el aprendizaje mediante las interacciones entre estudiantes y docente.
- Idoneidad ecológica, adaptación del proceso de estudio al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares y las condiciones del entorno social.
- Idoneidad mediacional, grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad afectiva, implicación de los estudiantes en relación a sus intereses y necesidades, así como actitudes y emociones

Considerando que el primer acercamiento formal al lenguaje algebraico ocurre en el primer año de educación secundaria, y que la comprensión del concepto variable es fundamental, así como una de las dificultades recurrentes en los distintos niveles de educación matemática, se aborda en el presente estudio como objetivo de aprendizaje: identificar el carácter multifacético de la variable, asociando dos de sus usos, como número general y cómo incógnita. Para ello se diseña una *trayectoria didáctica* (antes lo denominamos proceso de estudio), la cual refiere a la secuencia de actividades matemáticas en un proceso de enseñanza-aprendizaje entre el inicio y final de una situación-problema, considera las acciones de los estudiantes y del profesor como los medios para abordar la tarea matemática (Godino *et al.*, 2006). Tanto para el diseño como para la implementación de las trayectorias didácticas sobre la variable, se tuvieron en cuenta las seis idoneidades parciales antes enunciadas, así como sus criterios y descriptores, los cuales presentaremos en la siguiente sección.

3. METODOLOGÍA

El presente estudio es de tipo cualitativo puesto que, por un lado, se diseña e implementa una trayectoria didáctica siguiendo las etapas propuestas por el enfoque de Investigación Basada en el Diseño (IBD), por otro lado, se valora la idoneidad de la trayectoria y se analizan los resultados en cuanto a la adquisición de competencias algebraicas por parte de los estudiantes. La IBD refiere a una aproximación metodológica que centra su estudio en el aprendizaje en contextos escolares, ocupándose de problemáticas identificadas por los profesionales en la práctica. Debe ser recursiva, lo cual supone que los procesos de análisis, diseño, desarrollo, revisión y evaluación, ocurren en ciclos sucesivos; permite la reflexión oponiéndose a la idea de que los problemas identificados tienen soluciones preconcebidas (De Benito y Salinas, 2016).

El presente trabajo describe las etapas de la IBD de una trayectoria didáctica con fundamento en el EOS (Godino, 2013), particularmente en la noción de idoneidad didáctica

(Breda *et al.*, 2018) como herramienta para una intervención efectiva en aula. Se aborda la comprensión del concepto variable en un grupo de diez estudiantes mexicanos de nivel secundaria (11-12 años), considerando que la dificultad en el aprendizaje de conceptos algebraicos fundamentales refiere a una incapacidad de interpretar el significado de operaciones con símbolos abstractos.

Se consideraron tres fases que refieren a las etapas de la IBD (Godino *et al.*, 2013): 1) preparación del experimento; 2) experimentación; y 3) análisis retrospectivo.

3.1. FASE 1: PREPARACIÓN DEL EXPERIMENTO

Se definieron los objetivos instruccionales considerando los objetivos del currículo escolar, se propusieron actividades similares al libro de trabajo que utiliza la institución educativa (Ojeda *et al.*, 2012); el documento de referencia para el análisis de los contenidos matemáticos refiere al eje temático: Número, álgebra y variación para primer grado de Secundaria (SEP, 2017). Para cada sesión se consideran las prácticas definidas por la institución para la solución de los problemas propuestos, éstas prácticas se contrastan con los procedimientos que describe el estudiante en las hojas de trabajo (Godino *et al.*, 2014).

Para delimitar el proceso de aprendizaje que permita contrastar cambios significativos en el razonamiento de los estudiantes, se definieron los recursos manipulativos para implementar las tareas en aula. A continuación, se describe el diseño del contenido temático del proceso de instrucción para la enseñanza del concepto variable, particularmente sus usos como número general y cómo incógnita, así como la implicación del álgebra con disciplinas como la aritmética, geometría y ecología.

3.1.1. Primera sesión: *El álgebra en nuestra vida cotidiana*

El objetivo de la sesión es analizar la implicación del álgebra en la vida cotidiana, se analizó información sobre el cambio climático (BBC, 2018) para identificar acciones que refieren a operaciones aritméticas básicas (suma, resta, multiplicación y división). Se pide al estudiante que realice las siguientes prácticas:

- Identificar verbos que puedan expresarse con una operación matemática como se ilustra en la Tabla 1.
- Expresar una lista de oraciones mediante símbolos o letras, el docente explica la relevancia del álgebra para dar orden a ideas mediante el uso de variables.

Tabla 1. Acciones que refieren a operaciones matemáticas

Operación matemática	Ejemplo de expresiones cotidianas
Suma	Más, aumento, adicionar, sumar, incremento, elevar
Resta	Diferencia, restar, incremento o decremento de una cantidad en comparación con otra, disminuir
Multiplicación	N veces, doble, triple, multiplicar
División	Dividir, mitad, la tercera parte, repartir, compartir

Se puede suponer que el estudiante identifica las operaciones aritméticas básicas que refieren a los elementos conceptuales para comprender las prácticas operativas del álgebra. Se espera que el estudiante justifique la identificación de una acción de la vida cotidiana con la operación matemática equivalente, como: El incremento de 2 grados en la temperatura global sería catastrófico, la palabra incremento refiere a la operación aritmética de sumar. Los procedimientos y propiedades de la aritmética se utilizarán para introducir el uso de variables y facilitar la transición de aprendizajes aritméticos a los algebraicos.

3.1.2. Segunda sesión: Tienda de productos ecológicos

El objetivo de la sesión es identificar el uso de la variable como número general asignando letras al precio de diversos productos, así como la suma de términos algebraicos en una lista de compras. Se pide al estudiante que realice las siguientes prácticas:

- Resolver actividad de ampliación y refuerzo de la sesión previa que refiere a expresar con notación algebraica un conjunto de oraciones.
- Asignar letras al precio de una lista de productos y expresar el costo total de una compra.

En la sesión se aborda el uso de la variable como número general, el concepto de término algebraico, el concepto de términos semejantes y la reducción de términos semejantes. Se puede suponer que el estudiante identifica las palabras que pueden expresarse con una operación matemática.

Para la actividad de ampliación y refuerzo se espera que el estudiante exprese con notación algebraica un conjunto de oraciones, como: El nivel del mar incremento 10 centímetros, la palabra incremento refiere a la operación aritmética de sumar, los elementos que componen esta operación matemática son nivel del mar y 10 centímetros, el objetivo de la actividad es que el estudiante asocie una letra para el primer componente e identifique que 10 centímetros es un valor conocido. Se propone una segunda actividad en la que se espera que el estudiante identifique el uso de la variable como número general, al asignar letras al precio de una lista de productos y representar mediante las variables asignadas el costo total de una compra.

3.1.3. Tercera sesión: Edificios verdes

El objetivo de la sesión es identificar el carácter multifacético de la variable, su uso como número general y cómo incógnita mediante el cálculo del perímetro de figuras geométricas regulares. Se pide al estudiante que realice las siguientes prácticas:

- Identificar las figuras geométricas que ilustran terrenos para la construcción de edificios verdes, expresar el perímetro utilizando las letras que refieren a los lados de las figuras.
- Calcular el valor de las variables en un conjunto de figuras utilizando los datos proporcionados, como su perímetro y altura.

Se espera que el estudiante sea capaz de definir que es una variable y operarla identificando dos de sus usos, como número general y como incógnita. Los procedimientos

y propiedades de la geometría se utilizan para evidenciar la relación del álgebra con otros campos disciplinares.

La trayectoria didáctica considero cómo contexto teórico el análisis de la noción de idoneidad didáctica del EOS. En diversos trabajos, se han propuesto una serie de criterios, y sus descriptores, para cada uno de los tipos de idoneidad que propone el EOS (Breda *et al.*, 2018; Godino *et al.*, 2012). La Tabla 2 presenta los criterios, componentes e indicadores, para cada tipo de idoneidad propuestos (Godino, 2013).

Tabla 2. Componentes e indicadores de los criterios de idoneidad del EOS

Criterio	Componente	Indicador
Idoneidad epistémica	Situaciones-problema	Identificar situaciones de la vida cotidiana con la operación matemática equivalente. Asignar una letra al precio de un producto y asociarla a una lista de compras. Obtener el perímetro utilizando letras.
	Lenguajes	Identificar los diferentes usos de la variable mediante expresiones abiertas, suma de términos semejantes y perímetros.
	Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	Definición el concepto variable y sus usos como número general e incógnita. Validez de expresiones abiertas. Reducción de términos semejantes. Diferencia entre resultado y equivalencia.
	Argumentos	Se identifica el carácter multifacético de la variable.
	Relaciones	Se presentan situaciones que evidencian los diferentes usos de la variable.
Idoneidad Cognitiva	Conocimientos previos	Operaciones aritméticas básicas y perímetro
	Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales	Actividades de ampliación y refuerzo al inicio y final de cada sesión
	Aprendizaje	Comprensión del concepto variable e identificación de sus diferentes usos
Idoneidad afectiva	Intereses y necesidades	Reflexión de acciones que involucran el cambio climático y el diseño de ciudades sustentables
	Actitudes	Actividades individuales para el diseño de una ciudad sustentable
	Emociones	Relevancia del álgebra para dar orden a ideas, analizar datos y calcular valores desconocidos
Idoneidad Interaccional	Interacción docente-discente	El docente define el objetivo de la actividad al inicio de cada sesión Se promueve la participación mediante la resolución de tareas individuales y colectivas Retroalimentación inmediata
	Interacción entre alumnos	Actividades colaborativas que permitan llegar a acuerdos sobre los significados aprendidos
	Autonomía	Actividades individuales mediante hojas de trabajo
	Evaluación formativa	Acompañamiento del docente en cada dinámica

Idoneidad Mediacional	Recursos materiales	Material didáctico, hojas de trabajo, tarjetas, plantillas de figuras geométricas y prismas regulares. Uso de proyector.
	Número de alumnos, horario y condiciones del aula	Grupo reducido (10 estudiantes). Aula en condiciones óptimas. Sesiones en horario escolar
	Tiempo	50 minutos por sesión, 3 sesiones semanales
Idoneidad Ecológica	Adaptación al currículo	Primer acercamiento a conceptos algebraicos en relación al currículo escolar
	Apertura hacia la innovación didáctica	Diseño didáctico basado en resultados obtenidos en la comunidad científica referente a las dificultades de los estudiantes en la transición de la aritmética al álgebra, particularmente el concepto de variable y sus diferentes usos
	Adaptación socio-profesional y cultural	Reflexión sobre problemas del contexto actual, como el cambio climático Relevancia de las matemáticas para la toma de decisiones
	Educación en valores	Se fomenta el respeto y cuidado del medio ambiente Se promueve el trabajo colaborativo y la equidad
	Conexiones intra e interdisciplinarias	Contenidos relacionados con aritmética, geometría y ecología

Fuente: Elaboración propia basada en (Godino, 2013).

4. EXPERIMENTACIÓN Y ANÁLISIS RETROSPECTIVO

En este apartado se describen los resultados de las fases 2 y 3 del IBD. Por un lado, se presenta el proceso de experimentación de la trayectoria didáctica para cada una de las sesiones. Por otro lado, para el contraste y revisión de conjeturas sobre el proceso de aprendizaje previsto, se realizó el análisis retrospectivo entre las etapas de preparación del experimento y la experimentación.

4.1. PRIMERA SESIÓN: EL ÁLGEBRA EN LA VIDA COTIDIANA

Los estudiantes no mostraron dificultad en identificar acciones de la vida cotidiana con su operación matemática equivalente, incluso para identificar la operación matemática la mayoría de los estudiantes referían a la acción concreta, por ejemplo, la acción de sumar, para identificar la operación suma. Sin embargo, los estudiantes presentaron dificultades para diferenciar la suma de la multiplicación, en el caso de la división no fueron capaces de definir qué componentes referían a dividendo o divisor. Esto, no necesariamente se asocia a un concepto erróneo del estudiante, es probable que la actividad no fuera claro al definir éstos componentes. Por ejemplo: Las frases “*Conozco un tercio de la ciudad*” o “*Terminé la mitad de mi tarea*” podrían resultar confusas, ya que expresan que lo que se divide no son cantidades o números, sino objetos cotidianos como una ciudad o una tarea.

En relación al lenguaje utilizado por los estudiantes, se identificó el uso de íconos, símbolos, índices y letras. La Figura 1 muestra la respuesta del estudiante E ante el planteamiento de expresar una oración cotidiana utilizando letras y símbolos matemáticos;

se observa que el estudiante traduce la oración palabra por palabra, dibuja un sujeto que refiere a la palabra “Caminé”, para especificar la persona del sujeto, “Yo caminé”; utiliza simbología que conoce para expresar la unidad de medida del kilómetro; identifica la operación aritmética asociada que es la resta, y al no encontrar como representar la palabra “que” la escribe tal cual; usa un ícono para ilustrar la palabra “ayer”, un sol y una luna que refieren al trayecto de un día y flechas en sentido contrario a las manecillas del reloj indicando el tiempo en retroceso. Proporciona una segunda respuesta utilizando únicamente la letra “c” que etiqueta la palabra “caminé” y el signo de la resta con la simbología conocida para identificar un kilómetro.

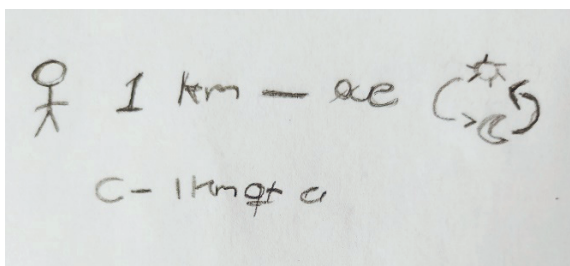


Figura 1. Respuesta del estudiante E a la actividad de la primera sesión.

La mayoría de los estudiantes lograron identificar operaciones aritméticas básicas sin asociar los componentes que operan en cada expresión. Sin embargo, hubo estudiantes que lograron asociar los componentes utilizando íconos como se ilustra en la Figura 2, con el ejemplo de “El nivel del mar aumentaría 10 centímetros”, el estudiante A usa dibujos, que pueden interpretarse como íconos según Pierce (1974), para expresar con detalle la idea de la oración; en un segundo ejemplo etiqueta el “nivel del mar” con una única letra e indica la unidad de medida de centímetros por metros.

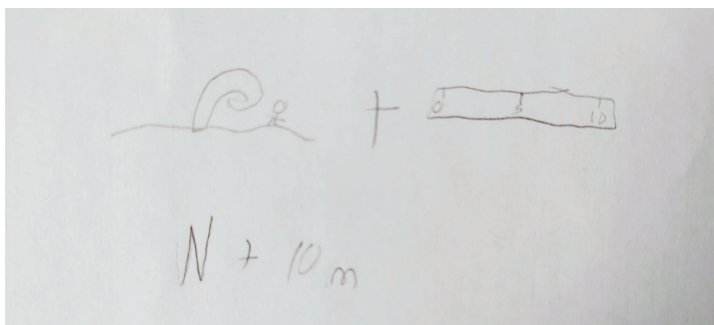


Figura 2. Respuesta del estudiante A.

Se identificó la acción de etiquetar componentes en lugar de asignar variables para operarlas, esta es la respuesta del estudiante A cuando se le preguntó en entrevista qué fue lo más difícil de resolver en las actividades de la primera sesión:

Estudiante A: Así como que a veces pues encontrar una letra para algunas donde era, no sé, nivel del mar junto encontrar una letra sola para explicar el nivel del mar.

Docente: ¿Por qué te cuesta encontrarla?

Estudiante A: Pues como que eran muchas palabras, entonces dije, como le hago para resumirla en una letra, porque en las otras, por ejemplo, pizza era una y nada más le pusimos la p, más fácil la primera letra.

4.2. SEGUNDA SESIÓN: TIENDA DE PRODUCTOS ECOLÓGICOS

La segunda sesión consideró gran parte del tiempo a actividades de ampliación y refuerzo, por lo que los estudiantes percibieron la sesión como una actividad de repaso; estas son algunas de las frases que utilizaron los estudiantes cuando se le pidió que relatará cuales fueron los objetivos de la sesión: “*estuvimos trabajando de nuevo eso de los números*”, “*estábamos practicando*”, “*es practicar los conceptos que vimos en la otra sesión*”.

A diferencia de la primera sesión, en la que los estudiantes manifestaron dificultad en asignar letras a los componentes de una operación aritmética, durante la segunda sesión asignaron con facilidad letras al precio de un producto para asociarlo a una lista de compras. Sin embargo, persistió la acción de etiquetar el nombre de los productos. Los estudiantes no operaban las letras como una variable.

La siguiente respuesta refiere a las actividades de la segunda sesión, confirmando que la acción de etiquetar generó un conflicto cognitivo causando dificultad y confusión:

Docente: ¿Qué fue lo más difícil para ti en la sesión?

Estudiante B: Ponerle una letra a cada cosa

Docente: ¿Por qué fue difícil?

Estudiante B: No sé, porque me confundía, por que al principio le ponía la letra que iniciaba, pero no se podía repetir y me empezaba a confundir

Docente: ¿No se podía repetir con qué?

Estudiante B: La letra, en la hojita que me toco siempre le ponía la letra que empezaba, pero había varias que empezaba con la misma letra, y me empezaba a confundir.

Esto último haciendo referencia a la indicación del docente sobre que los costos de los productos debían ser diferentes entre sí.

Se identificaron diversos lenguajes para expresar la operación aritmética de la multiplicación, un ejemplo es la respuesta de la Figura 3, el estudiante F utilizó diversos signos para expresar la operación, todos correctos, aunque se evidencia cierta resistencia al uso del signo igual para indicar que las expresiones son equivalente, como el caso de $B \bullet 2 = 2B$.

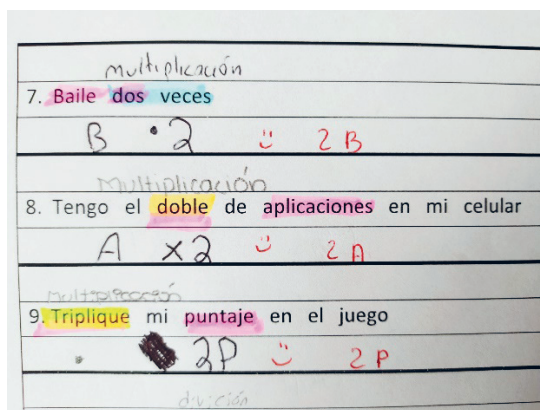


Figura 3. Respuesta del estudiante F a la actividad de la segunda sesión.

En relación a la simbología para expresar unidades de medida, se identificó un conflicto cognitivo debido a que los estudiantes no estaban seguros si se trataba de otra variable, consideraban relevante identificar a qué tipo de valores se hacía referencia. En la Figura 4 se ilustra la respuesta del estudiante E, quien incluso para expresar “nivel del mar” utiliza un acrónimo de la expresión “NdM”.

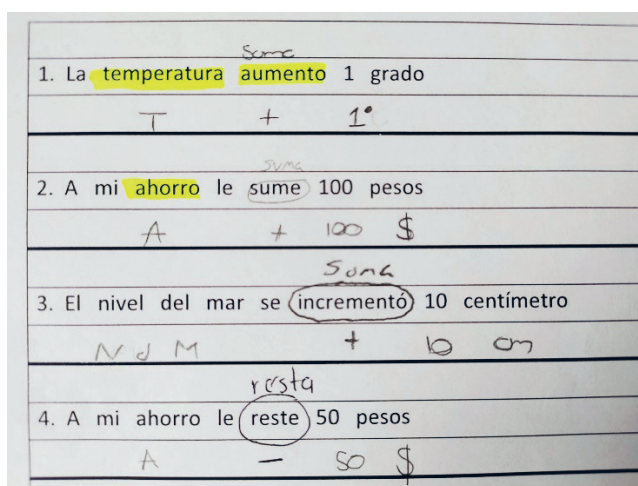


Figura 4. Respuesta del estudiante E a la actividad de la segunda sesión.

La Figura 5 muestra un error cognitivo persistente, si bien en principio podría decirse que el estudiante reduce términos semejantes de manera correcta, en realidad se identifica que realiza el procedimiento sin comprender que cada variable es un objeto particular,

cuando expresa el costo total de la compra suma todos los coeficientes asociando la letra a una etiqueta sin valor, los valores numéricos que el estudiante identifica como operables refieren a los coeficientes.

Tienda de productos ecológicos		Lista de compras de Mauh	
Producto ecológico	Costo en pesos		
Champú en barra	S	*Dos champús de barra	$S+S=2S$
Cepillo de dientes hecho de bambú	V	*Tres cepillos de dientes	$V+V+V=3V$
Vajilla de madera	Z	*Cuatro lapiceros	$C+C+C+C=4C$
Cargador móvil solar	N	*Una bolsa de Yuca	$H=1H$
Temporizador para la ducha	H		$2S+3V+4C+1H=$
Lapiceros hechos de botellas	C	Costo total	10
Bolsas de almidón de yuca	H		

Figura 5. Respuesta del estudiante D a la actividad de la segunda sesión.

Los argumentos de los estudiantes durante las entrevistas permitieron identificar el nivel de comprensión del concepto variable, este dato es difícil de identificar en las hojas de trabajo, ya que las actividades consideraban aspectos procedimentales, sin embargo, su resolución no garantizaba la comprensión correcta del concepto variable. Los estudiantes asociaban una variable con términos como letra, palabra, objeto, variante, componente, opción o símbolo. Para algunos la variable es un objeto o lugar del mundo real, lo que evidencian expresiones como:

- “La bolsa tiene más comida, la bolsa es la variable”
- “Esas letras es como el significado de la pizza o ensalada”
- “...forma de representar algo”

Sin embargo, algunos estudiantes identificaron que la variable puede referir a la representación de valores, que pueden ser específicos o descubiertos mediante cierta información, como lo manifiestan las siguientes expresiones:

- “...un número que no se conoce pero que se puede conocer con ciertos datos”
- “...maneras variadas de representar un valor específico”
- “...como un número nuevo reemplazable, sería como para llenar un hueco, pero para luego cambiarlo pues por un número”
- “...algo que da igual”

4.3. TERCERA SESIÓN: EDIFICIOS VERDES

Los estudiantes identificaron equivalencia en la suma de términos semejantes con su expresión reducida, como se ilustra en la Figura 6, pero no garantiza la comprensión de la variable para operarla matemáticamente, pareciera que seguían reglas de manera procedimental o por convención.

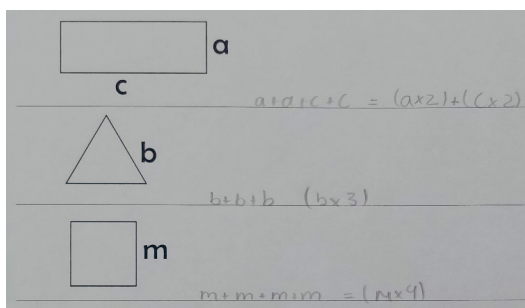


Figura 6. Respuesta de la estudiante C, actividad de la tercera sesión.

Se identificaron significados erróneos sobre el perímetro y el área, aunque los estudiantes conocían las fórmulas para calcularlos no podía definir a que refería el perímetro de una figura geométrica y cuál era la diferencia con el área. Sin embargo, a excepción de un estudiante, todos terminaron las tareas definidas en cada sesión y de manera correcta. Esto podría deberse a que las adaptaciones curriculares tenían semejanza con las actividades del libro de trabajo de la institución, con excepción de la primera sesión que dio la libertad de trabajar en una hoja en blanco.

Esta sesión permitió que el estudiante asociará dos usos de la variable, como un número general y como un valor fijo, se alcanza parcialmente el objetivo de la trayectoria didáctica, ya que los estudiantes no identificaron el uso de la variable como incógnita. Para expresar el perímetro de figuras geométricas se proponen dos actividades, el docente pregunta si para el primer caso, ver Figura 7, la letra “c” puede tomar cualquier valor, los estudiantes responden afirmativamente y con seguridad; cuando propone la segunda actividad, ver Figura 8, el docente pregunta lo mismo, ¿puede la letra “c” tomar cualquier valor?, aunque algunos contestan afirmativamente, otros esperan, reflexionan y responden, no.



Figura 7. Primera actividad de la tercera sesión.

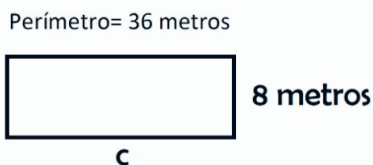


Figura 8. Segunda actividad de la tercera sesión.

Se observa que los estudiantes identifican que la variable “c” tiene un valor fijo, definido por los datos que proporciona el problema de la Figura 8. Sin embargo, para obtener el valor de la variable no es necesario operarla, la letra puede ser ignorada durante el procedimiento de resolución, el cual fue aritmético, aunque en algunos casos se usaron expresiones del lenguaje natural.

Los estudiantes fueron capaces de diferenciar dos usos de la variable, como un valor general y como un valor fijo. Sin embargo, no operan las variables para resolver las actividades, utilizan procedimientos aritméticos mediante diversas formas de expresión; la estudiante B resuelve mediante expresiones aritméticas y el lenguaje natural, es decir, relata el orden en el que resuelve la actividad valiéndose de expresiones como sumas y restas, como se ilustra en la Figura 9.

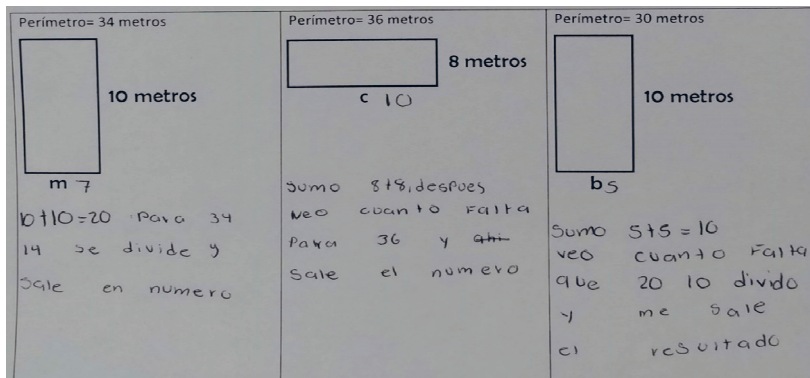


Figura 9. Respuesta del estudiante C en la tercera sesión.

El estudiante A, ver figura 10 utiliza operaciones aritméticas sin indicar ningún orden, las expresa de la forma convencional, sin asociar expresiones de equivalencia o igualdad.

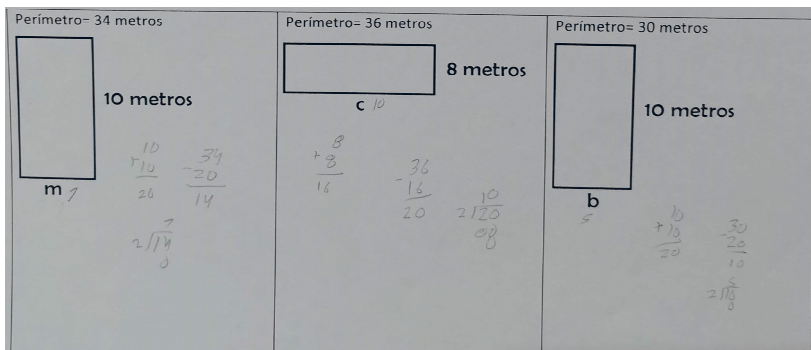


Figura 10. Respuesta del estudiante A en la tercera sesión.

El estudiante C emplea una codificación ordenada, indicando las operaciones horizontales y de forma procedimental, similar a la formalidad de expresiones algebraicas que denotan equivalencia, ver Figura 11. En estos ejemplos los estudiantes ignoraron el signo igual, “=”, para indicar el valor de la variable.

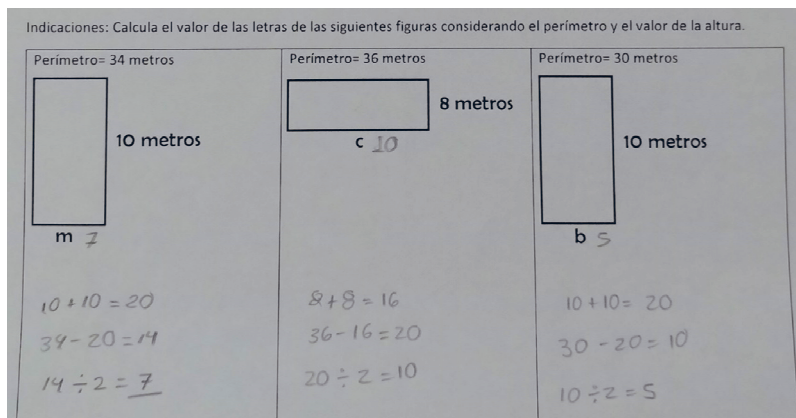


Figura 11. Respuesta del estudiante C en la tercera sesión.

Otro ejemplo es el de la respuesta del estudiante D, ver Figura 12, aunque reduce de manera correcta los términos semejantes ignora el signo igual, no asocia o no está seguro de que se trató de una equivalencia. Los estudiantes utilizaron el signo igual cuando se trataba del resultado de una expresión aritmética.

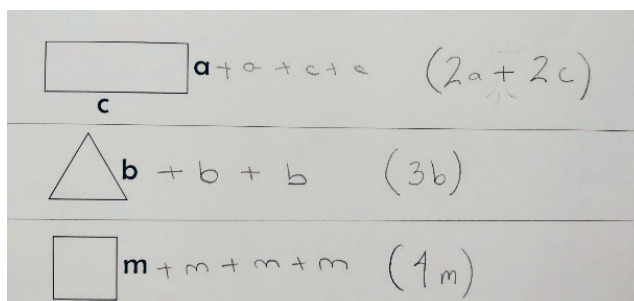


Figura 12. Respuesta del estudiante D a la actividad de la tercera sesión.

Un aspecto relevante es la poca autonomía del estudiante, ya que para cada tarea era necesaria la confirmación del docente que indicará que era correcto el procedimiento. Estas son las respuestas de dos estudiantes cuando en entrevista se le preguntó sobre cómo sabrían si sus respuestas son correctas:

“Pues paso al pizarrón, aunque no haya acabado, ósea se me hace como lo más relevante, porque así el profe sabe que ya le entendí al tema. Te puede checar la libreta y ponle tienes 3 de 3 bien, pero el profe no sabe si tardaste mucho, si todavía no entiendes y si pasas al pizarrón pues, al menos yo, me siento al frente, pues ahí el profe ya ve que hace el procedimiento correcto, ya sabe que lo entendiste”

“Porque así lo tenían los demás y pues estoy segura”

Estas respuestas manifiestan la necesidad de fomentar la autonomía en el estudiante, que está relacionada con la capacidad de comprobar y validar sus procedimientos, lo que implica dotarlo de diversas herramientas matemáticas que le permitan comprobar sus respuestas de manera autónoma.

5. RESULTADOS

Los resultados presentados en cada una de las fases permitieron identificar la pertinencia de las actividades propuestas considerando los criterios de idoneidad del EOS. Las actividades propuestas evidenciaron dos usos de las variables considerando diversas situaciones; el primer acercamiento refiere a la asociación de expresiones de la vida cotidiana con el uso de letras y símbolos matemáticos, en donde las variables representan objetos o lugares. En relación a su uso como un número general, se propone asociar la variable al costo de un producto para expresar el costo total de una compra, los estudiantes utilizan recursos aritméticos como la suma. Los estudiantes lograron resolver las actividades asociando la variable como un valor general y como un valor fijo mediante el cálculo del perímetro de figuras geométricas regulares. Sin embargo, no lograron operar las variables asociando su uso como una incógnita.

En relación al criterio de idoneidad cognitiva, el análisis preliminar sobre el aprendizaje del álgebra con fundamento en los resultados reportados en la investigación, permitió identificar como dificultad recurrente la comprensión del carácter multifacético de la variable. Aspectos como la disposición y colaboración de la institución educativa facilitó la identificación de objetivos institucionales, métodos de trabajo y consideraciones curriculares. Sin embargo, en relación a los aprendizajes esperados, persisten las dificultades asociadas con la abstracción e identificación de los elementos que operan en una expresión aritmética, así como el uso de variables para expresar equivalencias. Aunque se identificaron dos usos de la variable, no se logró el objetivo de operar la variable como una incógnita, debido a que las actividades propuestas no demandaban operar las letras, sino encontrar un valor desconocido fijo.

Sobre el criterio de idoneidad epistémica se consideraron escasas las oportunidades de argumentación, este resultado tiene relación con componentes del criterio mediacional tales como los recursos utilizados, es decir, las hojas de trabajo con actividades procedimentales, así como el tiempo asignado para cada actividad, el cual era limitado debido a que la trayectoria didáctica se llevó a cabo durante el horario escolar de los estudiantes.

El criterio de idoneidad ecológica consideró la disposición y comunicación con directivos y docentes para el diseño de actividades con relación al currículo escolar; la institución promueve entre sus valores institucionales el cuidado del medio ambiente, incluso cuenta con reconocimientos en este ámbito, lo que motivó que la trayectoria didáctica considerará

como contexto el cambio climático, el consumo de productos ecológicos y el diseño de edificios verdes. Sin embargo, éstos temas no despertaron mayor interés en los estudiantes, debido a que no fue clara la asociación con el álgebra, se abordaron únicamente como un contexto preliminar con breves explicaciones.

La idoneidad mediacional consideró espacios adecuados; trabajar con un grupo reducido permitió la diversidad de materiales didácticos como tarjetas, plantillas, recortes de figuras geométricas y tableros de trabajo. Sin embargo, el tiempo asignado para cada sesión fue limitado, ya que se trabajó durante el horario escolar considerando la disponibilidad de horarios de las materias.

En relación a la idoneidad afectiva, los estudiantes manifestaron entusiasmo y curiosidad al inicio de cada sesión, fue poco el interés por temas referentes al contexto ecológico y su relación con el álgebra. Para algunos las sesiones eran una forma de evadir sus clases seculares, un distractor de la rutina diaria; para otros, al no tener un valor curricular que impactará su desempeño académico restaron importancia al logro de los objetivos planteados. En este sentido se evidencia una práctica común en el ámbito escolar, la necesidad de recibir una recompensa que garantice que vale la pena el esfuerzo de la tarea matemática, éstas recompensas están asociadas con valores cuantitativos que impactan la calificación del estudiante, es decir, ellos relacionan la importancia de ciertas tareas con el valor de cierta puntuación.

La idoneidad interaccional evidenció conflictos semióticos difíciles de identificar debido a las pocas oportunidades para la negociación y argumentación. Además de la poca autonomía del estudiante para comprobar y validar sus procedimientos. Los argumentos sobre la identificación del carácter multifacético de la variable son escasos, fueron pocos los espacios para el diálogo durante las sesiones, debido al tiempo asignado para cada sesión, 50 minutos, insuficiente para las actividades asignadas y, por otro lado, el diseño de las actividades favoreció aspectos procedimentales debido la semejanza con las tareas curriculares de la institución. Las entrevistas dan muestra de la apropiación de significados erróneos, como, “una variable es cualquier cosa”.

Considerando que los estudiantes muestran dificultad para interpretar el significado de símbolos abstractos en el álgebra, se propuso una trayectoria didáctica para la identificación del carácter multifacético de la variable. Para el desarrollo de habilidades matemáticas son importantes capacidades previas como el trabajo colaborativo, la resolución de problemas, la confianza y motivación (Mallart *et al.*, 2016), por lo que para el análisis de los diversos factores que intervienen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos, se utilizó el constructo multidimensional del EOS que describe los componentes e indicadores de los criterios de idoneidad epistémica, cognitiva, mediacional, emocional, interaccional y ecológica.

6. IMPLICACIONES

El presente estudio describió el análisis retrospectivo entre las etapas de diseño e implementación considerando la noción de idoneidad didáctica del EOS. Se identificó que la trayectoria didáctica propuesta favoreció aspectos procedimentales, con pocas oportunidades de argumentación e interacción, fundamentales para la comprensión y negociación de los aprendizajes adquiridos por el estudiante. La adaptación de las actividades con el proyecto

educativo y las directrices curriculares resultó en hojas de trabajo que dificultaron la identificación de conceptos erróneos, los cuáles se identificaron durante las entrevistas.

Para la enseñanza efectiva de las matemáticas el docente requiere la especialización sobre el desarrollo de contenidos matemáticos curriculares, esto implica que la práctica docente es un proceso reflexivo y de mejora constante en relación al avance progresivo del estudiante; en este sentido el EOS proporcionó herramientas operativas para valorar la pertinencia didáctica en cada una de las etapas del estudio, identificando áreas de oportunidad en los métodos de enseñanza implementados.

Se consideraron insuficientes los componentes que refieren al lenguaje, reglas y argumentos. Éste resultado coincide con una discontinuidad en las configuraciones de la trayectoria epistémica, Godino *et al.* (2015) asocia esta brecha con la complejidad en el uso de diversos registros de representación semiótica, tratamiento y conversión, lo que fue evidente en la dificultad de los estudiantes para operar la variable como un objeto matemático. Considerando los niveles para describir los usos de la letra que propone Küchemann (1978), los estudiantes consideraron la variable como el nombre o abreviatura de un objeto; en algunos casos pudieron identificarla como un valor específico, aunque desconocido, que no requiere ser evaluado; hubo estudiantes que ignoraron la letra, ya que la actividad no demandaba su manejo o transformación para resolver la tarea.

Los estudiantes manifestaron dificultades cuando identificaban unidades de medida en las actividades, como *km* para kilómetro o el signo \$ para indicar pesos, se preguntaban si entonces también se trataba de variables; por lo que se identifica la necesidad de distinguir las propiedades que tienen los objetos de una expresión algebraica, como lo define Peirce (1974), se relacionan diversos tipos de signos en la escritura matemática, las letras son índices, los signos como +, -, =, que se identifican como símbolos y la expresión global como un ícono, ya que la expresión algebraica es la traducción del enunciado verbal al lenguaje matemático.

Se identificó cierta resistencia en el uso del signo igual cuando había que establecer relaciones entre valores conocidos con las variables implicadas, como el caso de las figuras geométricas y su perímetro. Es recurrente la visión operativa del signo igual, los estudiantes lo usan como un total o una respuesta, Frost (2015) lo denomina como el *procedimiento de resolver*, los estudiantes no consideran válidas expresiones abiertas y hay poca comprensión sobre los conceptos de equivalencia o igualdad.

Los resultados del presente estudio coinciden con Larios-Osorio *et al.* (2017) en relación a la necesidad de propuestas didácticas que doten de sentido el uso del Álgebra como una herramienta útil para el estudiante; su enseñanza debe abordarse como un medio para aprehender técnicas, lenguaje y procesos cognitivos; la relevancia de validar la pertinencia del proceso de enseñanza-aprendizaje mediante un enfoque desarrollado en el marco de la Didáctica de las Matemáticas como el EOS, permitió identificar áreas de oportunidad, proporcionando una visión ampliada de la enseñanza de la variable y su carácter multifacético.

7. CONCLUSIONES

El presente estudio muestra los resultados de una trayectoria didáctica para la adquisición de competencias algebraicas, concretamente la enseñanza de dos usos de la variable, como número general y cómo incógnita; se utilizó la noción de idoneidad didáctica del EOS para

valorar la pertinencia de las actividades propuestas. En el caso de la idoneidad epistémica, es fundamental caracterizar las actividades considerando los sistemas de prácticas institucionales desde una perspectiva disciplinaria, que permitan la reconstrucción de procesos matemáticos y el diseño de actividades que prioricen la argumentación ante ejercicios procedimentales. La idoneidad cognitiva requiere la definición de los significados personales logrados por el estudiante, así como la identificación de conflictos cognitivos. La idoneidad cognitiva tiene una estrecha relación con las interacciones didácticas entre docente, estudiantes y los recursos utilizados, lo que tiene implicación con las idoneidades interaccional y mediacional. Se identifica también el desafío de promover actitudes y emociones positivas hacia las actividades matemáticas, las cuales deben proponer situaciones que evidencien la utilidad de los aprendizajes adquiridos.

Éstos resultados dan cuenta de la relevancia de analizar a profundidad el diseño, implementación y valoración de intervenciones educativas condicionadas por el contexto. El presente estudio no sólo refiere al logro de los aprendizajes esperados, sino al análisis de los componentes involucrados en el proceso de enseñanza-aprendizaje, considerando que la valoración de estos componentes en los procedimientos matemáticos es compleja, por lo que es restringida una visión cuantitativa para valorar el grado de idoneidad didáctica de tareas matemática.

Los resultados obtenidos han evidenciado la importancia de reflexionar sobre la compleja naturaleza del concepto variable y sus diversas representaciones en los problemas algebraicos, así como la relevancia de promover actividades didácticas que inviten a la búsqueda, diálogo, ejercitación y validación de resultados. Sin embargo, la condicionante del tiempo y su relación con un plan académico limitan el diseño e implementación de actividades con alta idoneidad didáctica.

El análisis retrospectivo entre el diseño e implementación de la trayectoria didáctica posibilitó la identificación de áreas de mejora que permitirán progresivamente diseñar trayectorias didácticas con mayor pertinencia considerando las restricciones normativas del contexto escolar formal. Así, la noción de idoneidad didáctica, sus componentes e indicadores fueron de utilidad para orientar el reconocimiento de aspectos de mejora para los ciclos de rediseño y experimentación.

Este trabajo promueve un análisis reflexivo y a profundidad para comprender las dificultades que enfrenta el estudiante ante una tarea matemática, cómo resuelve esas dificultades y qué factores impactan su proceso de aprendizaje; además de, vincular la didáctica descriptiva del EOS y su aplicación en una trayectoria didáctica cuyos resultados podrían enriquecer el trabajo en el aula, como el aprendizaje de conceptos abstractos en un nivel educativo crucial para la adquisición de habilidades algebraicas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BBC. (2018). *Por qué 2030 es la fecha límite de la humanidad para evitar una catástrofe global*. BBC Noticias. <https://www.bbc.com/mundo/noticias-45785972>
- Blanton, M., Brizuela, B., Gardiner, A. M., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2017). A progression in first-grade children's thinking about variable and variable notation in functional relationships. *Educational Studies in Mathematics*, 95(2), 181–202. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9745-0>

- Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema*, 32(60), 255–278. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n60a13>
- Brizuela, B., Blanton, M., Gardiner, A. M., Newman-Owens, A. y Sawrey, K. (2015). Una alumna de primer grado explora las variables y su notación. *Estudios de Psicología*, 36(1), 138–165. <https://doi.org/10.1080/02109395.2014.1000027>
- De Benito, B. y Salinas, J. M. (2016). La investigación basada en diseño en tecnología educativa. *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa (RIITE)*, 0, 44–59. <https://doi.org/10.6018/riite/2016/260631>
- Frost, J. (2015). Disappearing x : When solving does not mean finding the solution set. *Journal of Mathematical Behavior*, 37, 1–17. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.10.003>
- Godino, J. (26-30 de junio del 2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En *Conferencia interamericana de educación matemática*. Recife, Brasil.
- Godino, J. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, (11), 111–132.
- Godino, J., Batanero, C., Contreras, Á., Estepa, A. y Wilhelmi, M. (6-10 de febrero del 2013). La ingeniería didáctica como Investigación Basada en el Diseño. *CERME* 8.
- Godino, J., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221–252.
- Godino, J., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39–88.
- Godino, J., Neto, T., Wilhelmi, M., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 8, 117–142.
- Godino, J., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis educativa*, 7(2), 331–354.
- Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. (2014). Ingeniería didáctica basada en el Enfoque Ontológico-Semiótico del Conocimiento y de la Instrucción Matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2), 167–200.
- Herrera, H., Cuesta, A. y Escalante, J. (2016). El concepto de variable: un análisis con estudiantes de bachillerato. *Educacion Matematica*, 28(3), 217–240. <https://doi.org/10.24844/em2803.08>
- Küchemann, D. (1978). Children ' S Understan of Numerical. *Mathematics in School*, 7(4), 23–26.
- Larios-Osorio, V., Farjado, M. del C., Valerio, T. de J., Spíndola, P., Sosa, C. y Ochoa, R. (2017). Dificultades en el aprendizaje del álgebra de bachillerato: un estudio exploratorio. *Páidi: Revista de proyectos y textos académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería*, 1(001), 53–71.
- Lucariello, J., Tine, M. T. y Ganley, C. M. (2014). A formative assessment of students' algebraic variable misconceptions. *Journal of Mathematical Behavior*, 33(1), 30–41. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.09.001>
- Mallart, A., Font, V. y Malaspina, U. (2016). Reflexión sobre el significado de qué es un buen problema en la formación inicial de maestros. *Perfiles Educativos*, 38(152), 14–30. <https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2016.152.57585>
- Ojeda, L. F., Martínez, C. y Manjarrez, E. I. (2012). *A practicar matemáticas I cuaderno de trabajo*. Castillo Macmillan.
- Peirce, C. S. (1974). *La ciencia de la semiótica*. Nueva visión.
- Şahin, Ö. y Soylu, Y. (2011). Mistakes and misconceptions of elementary school students about the concept of 'variable'. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 15, 3322–3327. <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.04.293>

SEP. (2017). *Aprendizajes clave para la educación integral. Matemáticas. Educación secundaria.*

Ursini, S., Fortino, E., Montes, D. y Trigueros, M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental. Una propuesta alternativa.* Trillas.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. *The ideas of algebra, K-12*, 5, 8–19.

Weinberg, A., Dresen, J. y Slater, T. (2016). Students' understanding of algebraic notation: A semiotic systems perspective. *Journal of Mathematical Behavior*, 43, 70–88. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2016.06.001>